POLITECNICO DI BARI - CORSO M

LEZIONI DI GEOMETRIA E ALGEBRA

Anno Accademico 2017 – 2018

DISPENSA 1

INSIEMI – RELAZIONI – FUNZIONI

TEORIA ED ESERCIZI

Docente: Prof. Giovanni Viterbo

# CAP.1 - INSIEMI, RELAZIONI, FUNZIONI

## &1.1 - Nozioni introduttive, terminologia e notazioni sugli insiemi

Def. 1.1 - I concetti di insieme, di elemento di un insieme e di proprietà sono assunti come concetti *primitivi*, cioè non riconducibili ad altri già noti.

Per insieme si deve intendere ogni aggregato ben definito di oggetti nel senso che si deve sempre poter dire se un dato oggetto appartiene o non appartiene all’insieme: gli oggetti che appartengono all’insieme si dicono elementi dell’insieme.

Salvo qualche eccezione, gli insiemi si indicano con lettere maiuscole mentre gli elementi con lettere minuscole: per indicare che un elemento x appartiene ad un insieme A si scrive xA, mentre per indicare che un elemento y non appartiene ad A si scrive yA.

Gli insiemi possono essere assegnati in tre modi:

1. Indicando esplicitamente tutti i suoi elementi (*modo estensivo)*

Esempio: A = 

1. Specificando la proprietà caratteristica degli elementi dell’insieme *(modo intensivo)*

Esempio: A = 

Si legge: l’insieme degli x che godono della proprietà “*x è una vocale*”*.*

1. Mediante i diagrammi di Venn:

In particolare:

1. l’insieme formato da un solo elemento sarà indicato con ;
2. l’insieme formato da due soli elementi sarà indicato con : poiché in tale notazione non conta l’ordine, tale insieme dicesi anche *coppia non ordinata.* Con (x,y) si indicheranno, invece, le coppie di elementi in cui conta l’ordine, perciò dette *coppia ordinata*. Dunque:

 =, (x,y)(y,x).

1. L’insieme che non ha elementi si indica con  e dicesi insieme vuoto.

Nota bene - Nella notazione estensiva degli insiemi, l’ordine con il quale vengono scritti gli elementi non è importante e, inoltre, gli elementi non vanno ripetuti:

.

Def. 1.2 – Due insiemi A e B si dicono uguali, e si scrive A = B, se contengono gli stessi elementi.

## &1.2 - Gli insiemi numerici fondamentali

Gli insiemi possono essere di natura qualsiasi: si dicono insiemi numerici gli insiemi i cui elementi sono numeri.

Insiemi numerici fondamentali sono:

1. L’insieme dei numeri interi naturali: .

In particolare indicheremo con N\* o con N0 l’insieme dei naturali diversi da zero: N\* = N0 = N - .

1. L’insieme dei numeri interi relativi: Z = .

In particolare indicheremo con Z\* o con Z0 l’insieme degli interi relativi diversi da zero, Z\* = Z - ; con Z+ gli interi relativi positivi e con Z- gli interi relativi negativi

Identificando +1 con il numero naturale 1, +2 con 2 e così via, si può dire che tutti i numeri naturali appartengono a Z (NZ).

1. L’insieme dei numeri razionali (decimali finiti o periodici)



In particolare indicheremo con Q\*  l’insieme dei numeri razionali diversi da zero:

Q\* = Q - .

Inoltre, si osservi che l’insieme Q dei numeri razionali contiene l’insieme Z dei numeri interi relativi non appena si osserva che ogni intero relativo m può scriversi come .

Dunque:



1. L’insieme dei numeri irrazionali I: è l’insieme dei numeri che non si possono esprimere come rapporto fra un intero relative e un intero natural diverso da zero. I numeri irrazionali sono numeri decimali, illimitati e aperiodici.

Esempi di numeri irrazionali sono:



V. L’insieme dei numeri reali **R**: è l’insieme formato dai numeri razionali (decimali finiti e periodici) e dai numeri irrazionali (decimali illimitati aperiodici).

L’insieme dei numeri reali R contiene gli insiemi N, Z, Q:



Inoltre:

con R\* indicheremo l’insieme dei reali diversi da zero, R-;

con R+ indicheremo l’insieme dei numeri reali positivi,  ;

con indicheremo l’insieme dei numeri reali strettamente positivi, x > 0.

In modo analogo si definiscono ed .

## &1.3 - Insiemi finiti, infiniti, numerabili

Gli insiemi N, Z, Q, R prima definiti sono tutti esempi di insiemi per i quali non è possibile elencare tutti i loro elementi; esistono però insiemi per i quali è possibile elencare tutti i loro elementi.

Un esempio è l’insieme formato dai numeri naturali minori o uguali a 10:



Si pone, perciò, la seguente definizione:

Def. 3.1- Un insieme si dice finito se è possibile elencare tutti i suoi elementi, altrimenti dicesi infinito.

Esistono, però, insiemi infiniti i cui elementi si possono contare anche se in modo incompleto nel senso che si possono elencare e contare tutti gli elementi di un qualunque sottoinsieme proprio, pur senza completarne l’elenco: tali insiemi si dicono numerabili.

Un esempio di insieme infinito numerabile è N, perché, ad esempio, si possono elencare e contare tutti i naturali fino a 100.

Un esempio di insieme infinito non numerabile è R perché considerati i reali compresi fra 0 e 10 non è possibile elencare e contare tutti i numeri reali compresi fra 0 e 10.

Prop. 3.1 - Ogni insieme finito è numerabile.

## &1.4 - Sottoinsiemi di un insieme - Insieme delle parti di un insieme

Accade talvolta che tutti gli elementi di un insieme B siano anche elementi di un altro insieme A: quando ciò si verifica si dice che B è un sottoinsieme di A o che B è una parte di A, o, ancora, che B è incluso in A. Si pone, quindi, la seguente definizione.

Def. 4.1 – Se A e B sono due insiemi, si dice che B è un sottoinsieme di A e si scrive



se ogni elemento di B appartiene a A. In simboli:

.

In particolare, se A contiene altri elementi che non appartengono ad B, si dice che B è strettamente incluso in A e in tal caso si scrive .

Def. 4.2 – Dicesi insieme delle parti di un insieme A e si indica con P(A) l’insieme formato da tutti i sottoinsiemi di A.

Ad esempio, se A = , allora

P (A) = 

Fra tutti i sottoinsiemi di A ve ne sono due *speciali*: l’intero insieme A e l’insieme vuoto , considerato sottoinsieme di un qualsiasi insieme.

Due tali sottoinsiemi si dicono *sottoinsiemi impropri di A,* mentre ogni altro sottoinsieme di A dicesi *proprio.*

Per l’inclusione valgono le seguenti proprietà.

Prop. 4.1 – Se A, B, C sono tre insiemi qualsiasi, allora:

1. 
2.  (prop. riflessiva)
3.  (prop. antisimmetrica)
4.  (prop. transitiva)

La dimostrazione è ovvia.

## &1.5 - Operazioni fra insiemi

Come accade per i numeri, anche fra gli insiemi si possono definire delle operazioni allo scopo di ottenere nuovi insiemi a partire da insiemi assegnati.

Qui di seguito vengono definite le usuali operazioni fra insiemi.

Def. 5.1 – Dati due insiemi A e B, dicesi unione di A e B il nuovo insieme indicato con  costituito da tutti gli elementi che appartengono ad almeno uno dei due insiemi.

In simboli:

.

In tale definizione, non si esclude che x possa appartenere ad entrambi gli insiemi: il simbolo  (vel) è una ‘o’ alternativa non esclusiva.

Def. 5.2 - Dati due insiemi A e B, dicesi intersezione di A e B il nuovo insieme indicato con  costituito da tutti gli elementi che appartengono ad entrambi gli insiemi A e B. In simboli:

.

dove il simbolo  indica una ‘e’ (et).

In particolare:

Def. 5.3 – Due insiemi si dicono disgiunti se la loro intersezione è vuota.

Def. 5.4 - Dati due insiemi A e B, dicesi insieme differenza di A e B l’insieme, denotato con A – B, che si ottiene escludendo dagli elementi di A quelli che appartengono a B.

In simboli:

 .

Ad esempio, se  e se  allora

A – B = 

e



In particolare, se A e B sono disgiunti allora A – B = A e B – A = B.

Un caso particolare di insieme differenza è l’insieme complementare.

Def. 5.5 – Se B è un sottoinsieme di A, l’insieme differenza A – B dicesi complementare di B rispetto ad A e in tal caso si indica con

CA(B).

In simboli:

CA(B) = A – B = 

sotto la condizione che 

Es. 5.1 - Siano A =  e B = ; allora si ha:

* 
* 
* 
* 

Es. 5.2 - Siano P l’insieme dei numeri pari e D l’insieme dei numeri dispari.

Allora si ha:

* ;
* , dove N è l’insieme dei numeri naturali
* P – D = P e D – P = D

Es. 5.3 - Sia A l’insieme di tutti i rettangoli e B l’insieme di tutti i rombi; allora:

*  è l’insieme dei quadrati
* A – B è l’insieme dei rettangoli aventi i lati consecutivi disuguali
* B – A è l’insieme dei rombi i cui angoli interni non sono retti.

Per le operazioni di unione e intersezione, valgono le seguenti proprietà.

Prop. 5.1 – Se A, B, C sono tre insiemi, si dimostra che:

1. ;
2. ;
3.  (prop. commutativa)
4.  (prop. associativa)
5. 

(prop. distributiva dell’unione rispetto all’intersezione)

1. 

(prop. distributiva dell’intersezione rispetto all’unione)

Per il complementare valgono le seguenti proprietà.

Prop. 5.2 – Siano X e Y due sottoinsiemi di A; si dimostra che:

1. 
2. 
3. 
4.  (IA formula di De Morgan)
5.  (IIA formula di De Morgan)

*Prodotto cartesiano fra insiemi*

Def. 5.6.1 – Se a e b sono due elementi qualsiasi, dicesi coppia ordinata di prima coordinata a e seconda coordinata b il nuovo elemento indicato con

(a, b)

che soddisfa la proprietà .

La conseguenza di tale proprietà, caratteristica delle coppie ordinate, è che esse possono differire o per un elemento o solamente per l’ordine.

Def. 5.6.2 - Più in generale, se a1, a2,…, an sono n elementi qualsiasi, dicesi n-pla ordinata il nuovo elemento indicato con (a1, a2,…, an) che soddisfa alla condizione

(a1, a2,…, an) = (b1, b2,…, bn) 

a1, a2,…, an si dicono rispettivamente prima coordinata (o componente), seconda coordinata,…, n-sima coordinata della n-pla (a1, a2,…, an).

Tutto ciò premesso, a partire da due o più insiemi si può costruire un nuovo insieme i cui elementi sono coppie ordinate e, più in generale, ennuple ordinate.

A tal fine si pone la seguente definizione.

Def. 5.7 – Se A e B sono due insiemi non vuoti, dicesi prodotto cartesiano di A e B e si denota con A x B l’insieme di tutte le coppie ordinate aventi rispettivamente la prima coordinata in A e la seconda coordinata in B. In simboli:



In generale, il prodotto cartesiano gode della proprietà associativa ma non della proprietà commutativa, così che qualunque siano gli insiemi A, B, C risulta sempre

A x ( B x C) = ( A x B ) x C = A x B x C

ma non sempre è

A x B = B x A.

* Nel caso di due insiemi uguali ad A, il prodotto cartesiano si indica con A2.
* Nel caso di n insiemi uguali ad A, il prodotto cartesiano si indica con An.

Esempi sono:

* R2 , insieme delle coppie ordinate di numeri reali

(spazio a 2 dimensioni)

* R3, insieme delle terne ordinate di numeri reali

(spazio a 3 dimensioni)

* Rn, insieme delle n-ple ordinate di numeri reali

(spazio a n dimensioni).

## &1.6 – Relazione fra insiemi, relazione di equivalenza, relazione d’ordine

Il concetto di prodotto cartesiano introduce al concetto di *relazione* o *corrispondenza* fra insiemi.

Si pone la seguente definizione.

Def. 6.1 – Se A e B sono due insiemi non vuoti, dicesi relazione R fra A e B ogni sottoinsieme del prodotto cartesiano A x B.

Si osservi esplicitamente che scegliere un sottoinsieme del prodotto cartesiano vuol dire considerare una qualche particolare relazione che lega alcuni elementi di A con elementi di B.

Se R è una relazione tra A e B, per indicare che  e  sono in relazione R, si scrive

R o, equivalentemente aRb.

In particolare, se A = B, si parla di relazione su A per indicare che indicare che R è una relazione fra elementi dello stesso insieme A.

Le più importanti relazioni fra insiemi sono le relazioni di equivalenza, le relazioni d’ordine e le relazioni funzionali, che andiamo qui di seguito a definire.

Def. 6.2 – Se R è una *relazione su A*, si dice che R è una relazione di equivalenza se verifica le seguenti proprietà:

1.  (prop. Riflessiva)
2.  (prop. Simmetrica)
3.  (prop. Transitiva)

Diamo alcuni esempi di relazione di equivalenza.

E6.1 – La relazione di uguaglianza su un insieme A così definita

R=

è una relazione di equivalenza sull’insieme su A.

E6.2 – Sia Q l’insieme dei numeri razionali e sia R la relazione su Q così definita:



Si dimostra che tale relazione è una relazione di equivalenza su Q.

E6.3 – Ricordato che due rette complanari si dicono parallele o quando sono coincidenti o quando non hanno punti in comune, si dimostra che relazione di parallelismo è una relazione di equivalenza.

E6.4 – Ricordato che due piani dello spazio si dicono paralleli o quando sono coincidenti o quando non hanno punti in comune, si dimostra che la relazione di parallelismo fra piani è una relazione di equivalenza.

Def. 6.3 – Se R è una relazione su A, si dice che R è una relazione d’ordine su A se verifica le seguenti proprietà:

1.  (prop. *riflessiva*)
2.  (prop. *antisimmetrica*)
3.  (prop. *transitiva)*

In particolare:

Def. 6.4 – Una relazione d’ordine R si dice di totale ordine se verifica l’ulteriore condizione

1. , ovvero se due qualunque elementi di A sono sempre in relazione R.

E’ opportuno osservare che la proprietà antisimmetrica impone che se a e b sono elementi distinti di A non possono verificarsi contemporaneamente le due relazioni aRb e bRa.

E6.5 – Si consideri su N la relazione d’ordine naturale



Si dimostra che tale relazione è una relazione di totale ordine.

E6.6 – Sia r una retta sulla quale è fissato un verso e sia R una relazione su r così definita

 PR Q P precede Q nel verso fissato.

Si dimostra che R è una relazione di totale ordine su r.

E6.7 – Un esempio di relazione d’ordine che non è di totale ordine è la relazione di inclusione fra sottoinsiemi. Infatti, se A è un insieme non vuoto e se P(A) è l’insieme delle sue parti, si dimostra che la relazione di inclusione  è una relazione d’ordine su P(A) ma non è di totale ordine perché esistono sottoinsiemi X, Y di A che non sono legati né dalla relazione X Y né dalla relazione Y X.

## &1.7 – Relazioni funzionali – Funzioni

Le relazioni viste finora si riferiscono agli elementi di uno stesso insieme; più in generale le relazioni servono a mettere in corrispondenza elementi di insiemi anche diversi tra loro.

Esempi di relazione fra insiemi diversi sono le *relazioni funzionali* qui di seguito definite.

Def. 7.1 – Se A e B sono due insiemi non vuoti e se R è una relazione tra A e B, si dice che R è una relazione funzionale fra A e B se

.

cioè se ogni elemento di A, senza alcuna eccezione, è in relazione con uno e un solo elemento di B.

Es. 7.1 – Sia A =  l’insieme costituito da ragazzi di nome Giovanni (G), Nicola (N) e Paolo (P) e sia B = l’insieme costituito dagli sport calcio ( c) e tennis (t). L’insieme prodotto cartesiano di A per B è

.

Una relazione funzionale fra A e B è

R1 = 

perché ogni elemento di A è in relazione con un solo elemento di B (anche se è lo stesso).

Non sono funzionali le seguenti relazioni fra A e B:

* R2= perché l’elemento P di A non ha un corrispondente elemento in B;
* R3=perché G è in corrispondenza con due elementi di B.

L’importanza delle relazioni funzionali sta nel fatto che esse consentono di definire uno dei più importanti concetti della matematica: il concetto di funzione.

Si pone quindi la seguente definizione.

Def. 7.2 – Se A e B sono due insiemi non vuoti e se R è una relazione funzionale tra A e B, dicesi *funzione* (o *applicazione*) di A in B la terna ordinata f = (A, B, R) avente l’insieme A come prima componente, l’insieme B come seconda componente e la relazione funzionale R come terza componente.

Una notazione alternativa di funzione è la seguente:

dove y = f(x) sta ad indicare la legge con la quale ogni elemento di A è posto in corrispondenza con gli elementi di B dalla relazione R .

Se  è una funzione di A in B, allora:

* l’insieme A dicesi insieme di partenza o di definizione della funzione f,
* l’insieme B dicesi insieme di arrivo o insieme dei valori della funzione f.

Inoltre:

* se x è un elemento di A, l’unico elemento y di B in relazione con x mediante R si denota con f(x) e dicesi immagine di x mediante f o valore di f in x e si scrive y = f(x).
* Il sottoinsieme di B formato da tutte e sole le immagini degli elementi di A dicesi codominio della funzione e si indica con f(A).

In generale è

f(A) ≠ B,

solo per alcune funzioni è f(A) = B.

Infine:

* Se y = f(x), si dice che x è una controimmagine di y mediante f e si indica con f -1(y).

L’uso dell’articolo indeterminativo sta ad indicare che la contro immagine può essere anche più di una.

La notazione  è utilizzata soprattutto con le funzioni matematiche in cui la legge di corrispondenza è rappresentata da una equazione, y = f(x).

È bene osservare che affinché una funzione sia completamente nota occorre assegnare tre elementi:

1. l’insieme di partenza A,
2. l’insieme di arrivo B
3. la legge di corrispondenza fra A e B.

Talvolta, gli insiemi A e B sono sottintesi: ad esempio, per le funzioni reali di variabile reale ciò è possibile quando B = R ed A è il più grande insieme di numeri reali per il quale la relazione y = f(x) è una relazione funzionale.

In tali casi il primo passo da effettuare è il calcolo del campo di esistenza della funzione assegnata.

Esempi notevoli di funzione sono le seguenti:

E7.1 – La *funzione identica* su un insieme A, così definita:



(y = x)

Essa associa ad ogni elemento x di A lo stesso elemento x di A.

E7.2 – La *funzione costante*



(y = b)

che associa ad ogni elemento di A lo stesso unico elemento b di B.

**Classificazione delle funzioni**

Def. 7.3 – Una funzione si dice matematica o *analitica* se la legge di corrispondenza è un’equazione, si dice non matematica o empirica se la legge di corrispondenza non è un’equazione (ad es. una proposizione, una tabella di dati, una proprietà).

Def. 7.4 – Una funzione analitica si dice reale se l’insieme di arrivo B è un sottoinsieme di R, si dice di variabile reale se l’insieme di partenza A è un sottoinsieme di R, infine si dice reale di variabile reale se entrambi gli insiemi A e B sono sottoinsiemi di R.

D’ora in poi, ci occuperemo solo di funzioni analitiche reali di variabile reale.

Def. 7.5 – Una funzione reale di variabile reale, si dice:

1. algebrica se la legge di corrispondenza y = f(x) contiene solo le cinque operazioni elementari (somma, differenza, prodotto, quoziente, potenza-radice), si dice trascendente se contiene altre operazioni (log, exp, sin, valore assoluto, ecc..);
2. razionale se la legge y = f(x) non presenta la x sotto il segno di radice, irrazionale se contiene la x sotto il segno di radice;
3. intera se la legge f(x) non presenta la x al denominatore, fratta se la x compare al denominatore.

## &1.8 - Funzioni ingettive, surgettive, bigettive

Si è detto che ogni funzione f è definita come terna ordinata f = (A, B, R) in cui A è l’insieme di partenza, B è l’insieme di arrivo ed R è una relazione funzionale fra gli insiemi A e B.

E’ opportuno rimarcare esplicitamente la differenza fra i ruoli svolti dall’insieme di partenza e di arrivo: nel concetto di funzione, mentre si richiede che ogni elemento di A deve essere in relazione con uno e un solo elemento di B, per gli elementi di B non è richiesta alcuna restrizione, perché può accadere che:

1. un elemento di B non sia in relazione con nessun elemento di A;
2. un elemento di B sia in relazione con più elementi di A (vedi la funzione costante)
3. un elemento di B sia in relazione con un solo elemento di A.

Come si vedrà nel seguito, queste circostanze sono determinanti quando si cerca di invertire la funzione f (per trasformare elementi di B in elementi di A: *problema dell’invertibilità di una funzione*)

Poniamo, perciò, le seguenti definizioni.

Def. 8.1 – Una funzione f di A in B si dice *ingettiva* se trasforma elementi distinti di A in elementi distinti di B.

In simboli: (f è ingettiva) 

o, equivalentemente, se:

.

Def. 8.2 – Una funzione f di A in B si dice *surgettiva* se ogni elemento di B è immagine di almeno un elemento di A (uno o più).

In simboli: (f è surgettiva) .

Def. 8.3 – Una funzione f di A in B si dice *bigettiva* o *biunivoca* se essa risulta ingettiva e surgettiva, ovvero:

( f è una funzione bigettiva di A in B) .

Si noti che l’esistenza della controimmagine x è garantita dalla surgettività della funzione, l’unicità della controimmagine dalla ingettività della funzione.

In particolare, si osservi che se A e B sono insiemi finiti, con A formato da m elementi e B formato da n elementi, allora:

1. Se m < n , si possono definire funzioni solo ingettive di A in B ma non surgettive e tanto meno bigettive.
2. Se m > n, si possono definire funzioni solo surgettive di A in B ma non ingettive e tanto meno bigettive.
3. Se m = n, si possono definire funzioni sia ingettive, sia surgettive e sia bigettive di A in B.

## &1.9 – Composizione di funzioni, funzioni inverse

Un’altra fondamentale nozione relativa alle funzioni riguarda la loro composizione. Si pone la seguente:

Def. 10.1 – Se A, B, C sono tre insiemi non vuoti e se

 e 

sono due funzioni tali che



si può calcolare una nuova funzione,



detta *funzione composta* di f e g, definita ponendo:

.

f dicesi prima componente della funzione composta, g dicesi seconda componente della funzione composta.

È importante osservare che ha senso calcolare la funzione composta solo se il codominio della prima componente f è contenuto nell’insieme di partenza della seconda componente g, ovvero se

, essendo .

La composizione delle funzioni non è in generale commutativa mentre è sempre associativa:

1. 
2. 

Di più:

Prop. 9.1 – Se e  sono due funzioni , si dimostra che:

1. (f e g ingettive)  è ingettiva)
2. (f e g surgettive)  è surgettiva)
3. (f e g bigettive)  è bigettiva)

Def. 10.2 – Se  e , si dice che g è la funzione inversa di f se



Prop. 9.2 - Se e  è la funzione inversa, si dimostra che:

1.  è la funzione identica su A:



1.  è la funzione identica su B:



Dim. Poiché g è la funzione inversa di f, per definizione si ha:



Sostituendo y = f(x) in g(y) = x si ha: g(f(x)) = x ;

viceversa, sostituendo x = g(y) in f(x) = y si ha: f(g(y)) = y .

Osserviamo che non tutte le funzioni sono dotate di inversa, ma quando esiste essa è unica e si denota con .

Si pone la seguente definizione.

Def. 9.3 – Un funzione si dice invertibile se è dotata di funzione inversa.

Sussiste la seguente fondamentale proprietà.

Prop. 9.2 – Tutte e sole le funzioni bigettive (biunivoche) sono dotate di inversa.

Osservazione – L’inversa delle funzioni analitiche di equazione y = f(x) si ottiene esplicitando (ricavando) x rispetto ad y !!!

Ad esempio, l’inversa della funzione y = 2x + 3 è x = .

# CAP.1 - Esercizi (Insiemi, Relazioni, Funzioni)

E1 – Siano dati gli insiemi

A =  e B = .

Determinare: , , A – B, B – A.

Soluzione

Calcoliamo gli elementi dell'insieme A. Posto x2 = t, si ha:

1. 
2. 
3. 
4. ; 

Dunque, gli elementi di A sono: .

Ora calcoliamo gli elementi dell'insieme B, ovvero i divisori di 14:

.

Di conseguenza:

; .

E2 – Verificare che per ogni terna di insiemi A, B, C risulta:

1. 
2. 

dim. a)

Dobbiamo dimostrare che: 

1. 



.

1. Viceversa, 

.

Dunque: 

Da (1) e (2) segue l'uguaglianza.

E3 – Sia dati gli insiemi è divisore di e B = . Calcolare B’ = CA(B).

Soluzione

Gli elementi di A sono: .

Di conseguenza:

.

E4 – Se A e B sono due sottoinsiemi dell’insieme E, dimostrare che

 (Formule di De Morgan),

dove l’apice sta ad indicare il complementare degli insiemi rispetto ad E.

Soluzione

dim. a) Dobbiamo dimostrare che: 

1. 



Dunque: 

1. Viceversa, 



Dunque: .

Da (1) e (2) segue che 

dim. b) Dobbiamo dimostrare che: 

1. 



Dunque: 

1. Viceversa, 



Dunque: .

Da (1) e (2) segue che 

E5 – Dati gli insiemi A = e B = , costruire i prodotti cartesiani A x B e B x A.

Soluzione

;

.

E6 – Costruire l’insieme delle parti degli insiemi E = , F =  .

Soluzione

P(E) = ;

P(F) = .

E7 – Dimostrare che per ogni terna di insiemi E, F, G risulta:

.

Verificare tale uguaglianza con un esempio e dire se è pure:

.

Soluzione

Per l'uguaglianza, dobbiamo dimostrare la doppia inclusione.

1. 

.

Dunque: .

1. Viceversa,  .

Dunque: 

E8 – Studiare le seguenti relazioni:

1. R1  sull’ insieme E = ;
2. R2 relazione su N così definita: R2 ;
3. R3 relazione su Z\* così definita: R3x divisore di y.

Svolgimento

1. Studiamo la relazione R1.

a) R1 è riflessiva se.

Poiché ,, ma  R1 non gode della proprietà riflessiva.

1. R1è simmetrica se .

Nel nostro caso e anche : dunque, R1 gode della proprietà simmetrica.

1. R1è transitiva se .

Nel nostro caso:

(1,1)  R1, (1,3)  R1 (1,3)R1

(3,1)  R1, (1,3)  R1 (3,3)R1

Dunque, R1 gode della proprietà transitiva.

La relazione R1non è una relazione di equivalenza poiché non gode della proprietà riflessiva.

1. Studiamo la relazione R2.
2. R2 è riflessiva poiché 
3. R2 è simmetrica. Infatti:

.

1. R2 è transitiva. Infatti:



.

Dunque, la relazione R2 è una relazione di equivalenza sull’insieme N2 .

1. Studiamo la relazione R3.
2. R3 è riflessiva poiché ogni intero non nullo è divisore di se stesso, 
3. R3 non è simmetrica, poiché se x è un divisore di y non sempre y è un divisore di x.
4. R3 è simmetrica. Infatti: (xRy e yRz)  (x è divisore di y) e (y è divisore di z) 

x è un divisore di z xRz.

Dunque, R3 è transitiva.

La relazione R3 non è una relazione di equivalenza poiché non gode della proprietà simmetrica.

E9 – Sia S = R4 e sia R la relazione su S così definita:

(a,b,c,d) R (e,f,g,h) (a,b,c,d) - (e,f,g,h) ,

dove

T = .

Dimostrare che R è una relazione di equivalenza in S.

Svolgimento

1. Dimostriamo che R è riflessiva. Dobbiamo verificare che:



Infatti,





Dunque, la relazione R è riflessiva.

1. Dimostriamo che R è simmetrica. Infatti:



(moltiplicando per – 1)



.

Dunque, R è simmetrica.

1. Dimostriamo che R è transitiva. Siano:







Dunque, R è transitiva.

Da a), b), c) segue che R è una relazione di equivalenza in S = R4.

E10 – Data la relazione R =  è pari, dimostrare cheR è una relazione di equivalenza su Z.

Dim. 1 – Dobbiamo dimostrare che R è riflessiva, simmetrica e transitiva.

1. x – x è pari  R x  R è riflessiva.
2. R: x - y pari è pari R. Dunque, R è simmetrica.
3. è pari e y – z è pari è pari 

x – z è pari . Dunque R è transitiva.

Da a), b), c) segue che R è una relazione di equivalenza su Z.

E11 - Data la relazione R=, dimostrare che R è una relazione di equivalenza in Z.

Dim. 1 - Dobbiamo dimostrare che R è riflessiva, simmetrica e transitiva.

1.  xR x  R è riflessiva.
2.  R  R è simmetrica.
3. 

la relazione R è transitiva.

E12  ***–*** Dati gli insiemi

, ,

calcolare:

1. ;
2. A – B, A – C, B – C;
3. ;
4. .

Verificare che:

1. ;
2. ;
3. .

Dimostrare che 

1. ;
2. ;
3. dimostrare che : 

Svolgimento

Gli insiemi A, B e C sono assegnati in forma intensiva: calcoliamo la loro forma estensiva.

Per calcolare la forma estensiva di A dobbiamo risolvere la disequazione



Per trovare le soluzioni, studiamo:





Utilizzando la regola dei segni, si ha che le soluzioni sono

.

Dunque, la forma estensiva di A è:

.

Ora calcoliamo la forma estensiva dell’insieme B risolvendo la disequazione

.

Per trovare le soluzioni, studiamo:

;

.

Applicando la regola dei segni, si ha che le soluzioni sono



e la forma estensiva di B è

.

Infine calcoliamo la forma estensiva di C risolvendo la disequazione

.

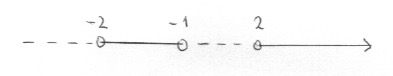
Essa ha soluzioni



così che la forma estensiva di C é

.

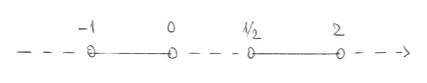
1. L’insieme è rappresentato geometricamente da



Ne segue che

.

L’insieme è rappresentato geometricamente da



Ne segue che

.

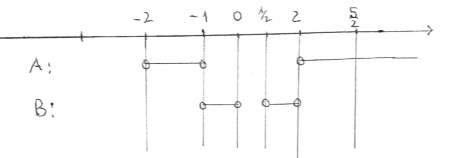
Infine, l’insieme è rappresentato geometricamente da



Ne segue che

.

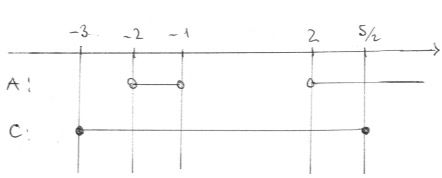
1. Per calcolare l’insieme differenza A – B rappresentiamo geometricamente i due insiemi A e B:



Dalla tabella si deduce che

.

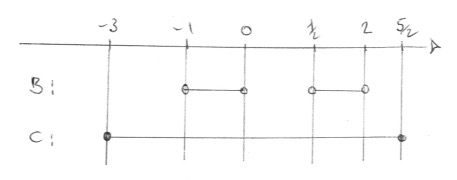
Per calcolare l’insieme differenza A – C rappresentiamo geometricamente I due insiemi A e C:



Dalla tabella si deduce che

.

Per calcolare l’insieme differenza B – C rappresentiamo geometricamente I due insiemi B e C:



Dalla tabella si deduce che

.

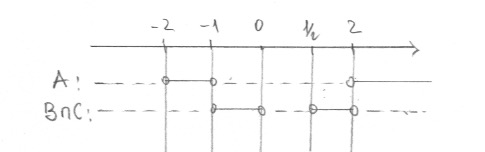
1. Utilizzando le tabelle del punto (b), si deduce che:



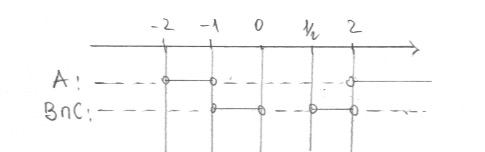
1. Utilizzando le tabelle del punto (b), si deduce che:



1. Per verificare l’uguaglianza dobbiamo calcolare i due insiemi.



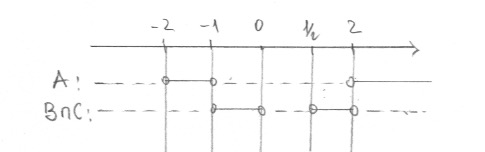




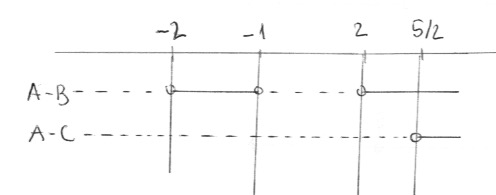


Dunque: .

1. Per verificare l’uguaglianza dobbiamo calcolare i due insiemi:



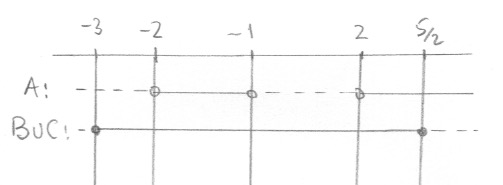




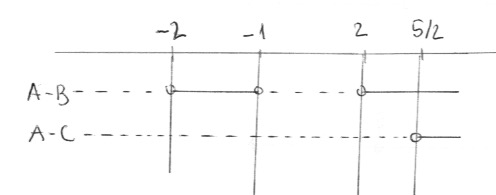
.

Dunque, l’uguaglianza è verificata:.

1. Per verificare l’uguaglianza dobbiamo calcolare i due insiemi:









Dunque, l’uguaglianza  è verificata.

1. Dobbiamo dimostrare che:.
2. 
3. 





Dunque: .

1. Dobbiamo dimostrare che: 
2. Sia 



1. Sia

  
.

Dunque: .

1. Dobbiamo dimostrare che se  allora: .

Sia ;

Viceversa, sia .

Pertanto: .

Dimostriamo, ora, la seconda relazione.

Sia 

Viceversa, sia .

Pertanto: .

E13 – Data la funzione



1. dimostrare che f è bigettiva;
2. calcolare la sua inversa;
3. verificare le proprietà fondamentali dell’inversa.

Soluzione

Dim. 1 – (a) 

Dunque, f è ingettiva.

(b) Per dimostrare che f è surgettiva, risolvo y = mx + q  .

Dunque, poiché , si deduce che f è surgettiva.

(c) Poiché f è ingettiva e surgettiva, essa è bigettiva e quindi invertibile.

Dim. 2 – L’inversa della funzione f è la funzione



ottenuta ricavando x in funzione di y (vedi 1-b).

Dim. 3 –

a) 

b) 

E14 – Data la funzione :

1. calcolare il dominio e il codominio di f;
2. dire se f è invertibile e, in caso affermativo, calcolare f-1 verificando che in

tal caso è f-1 = f;

1. determinare l’immagine di 2, f(2), e le controimmagini di 3 e di – 6, f-1(3) e

f-1(6);

1. calcolare (x) e risolvere la disequazione .

Soluzione

1. Il dominio della funzione è D = R – . Il codominio si ottiene calcolando x rispetto ad y:



La condizione di esistenza per x è  e il codominio di f è:

.

Dunque: .

1. Dimostriamo che f è ingettiva:



Dunque, f è ingettiva.

Poichè Cf = la funzione data non è surgettiva: se, però riduciamo l’insieme di arrivo all’insieme , essa risulta anche surgetiva e quindi bigettiva e invertibile. In tal caso:



e:



ovvero, poichè la variabile indipendente è sempre indicata con x e la variabile dipendente con y, risulta:  .

Dunque: 

1. 
2. 

Ora risolviamo la disequazione:





Applicando la regola dei segni e tenuto conto del dominio di f, si ha che soluzioni sono: 

E15 – Data la funzione :

1. calcolare il dominio e il codominio;
2. dire se f è surgettiva, ingettiva, bigettiva;
3. calcolare la funzione inversa ;
4. verificare le proprietà caratteristiche della funzione inversa.

Soluzione

1. Il dominio è .

Pertanto,

.

Ora calcoliamo il codominio:



Dunque, .

1. Verifichiamo se f è ingettiva:

Sia : dunque f è ingettiva.

Poichè



f non è surgettiva e, di conseguenza, non è bigettiva.

Se però modifichiamo l’insieme di arrivo e assumiamo B = Cf, la funzione diventa surgettiva e quindi bigettiva e invertibile.

La funzione così modificata è:

.

1. La funzione inversa, f -1, è:



ovvero, scambiando x con y (la v.d. è sempre indicate con y, la v.i. sempre con x), è:

.

Infine, verifichiamo le proprietà della funzione inversa.

1. 

2. , essendo .

E16 – Data la funzione :

1. calcolare il dominio e il codominio;
2. dire se f è surgettiva, ingettiva, bigettiva;
3. calcolare la funzione inversa ;
4. verificare le proprietà caratteristiche della funzione inversa.

Soluzione

1. Il dominio è .

Pertanto,

.

Ora calcoliamo il codominio:

Dunque,

.

1. Verifichiamo se f è ingettiva:

Sia : dunque f è ingettiva.

Poichè



f non è surgettiva e, di conseguenza, non è bigettiva.

Se però modifichiamo l’insieme di arrivo e assumiamo B = Cf, la funzione diventa surgettiva e quindi bigettiva e invertibile.

La funzione così modificata è:

.

1. La funzione inversa f -1 è:



ovvero, scambiando x con y (la v.d. è sempre indicate con y, la v.i. sempre con x), è:

.

Infine, verifichiamo le proprietà della funzione inversa.

1. 

2. ,

essendo 